—1—

G - пр. алг. группа $/\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$ - ~~хорошей~~ характ. $p \gg 0$ или 0.

$\mathcal{B} = G/B$ - мног. флагов $= \{B \leq G\} = \{\mathfrak{b} \leq \mathfrak{g}\}$
подалг. Бореля

$\cancel{\mathfrak{g} = \mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{b} \leq \mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}}$ кан: $\mathfrak{n} = \mathfrak{b}^{\perp}$

не вдаваясь в мор. качества.

$$T^*_{\mathfrak{b}}\mathcal{B} = (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^* \underset{\mathfrak{b}^{\perp}}{\cong} \mathfrak{n}$$

$$\pi : T^*\mathcal{B} \longrightarrow \mathfrak{g}_{nil} \hookrightarrow \mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$$ (отобр. моментов)
алгебр.

$\{(\mathfrak{b}, x) \mid x \in \mathfrak{n}(\mathfrak{b})\} \longmapsto x$

рез. Шпрингер

слой: $\mathcal{B}^x := \pi^{-1}(x)$ $\left(\operatorname{im}(\mathcal{B}^x \to \mathcal{B}) = \mathrm{Zeroes}(\partial_x) = \mathcal{B}^{e^x}\right)$
к обозначен

связан с представлением:
- W_x
- $\mathcal{U}_x(\mathfrak{g})$
- $\mathcal{H}_{aff}$
- $G(\mathbb{F}_q)$

$\mathfrak{g}_{nil}$

Σe_α
α-simple
subreg. (плотный в $\mathfrak{n}(p_\alpha)$)
Дикий запад.
e_α, α-long.
0

$\mathcal{B}^x$

- Крив. Дынкин (в рез. клейнов. особен.)

$\bigsqcup_{w(\alpha_0) \neq pos.} BwB/B$

$\mathcal{B}$

Известно:

1) $\mathcal{B}^x$ - связно
2) $\dim \mathcal{B}^x = \dim \mathcal{B} - \frac{1}{2}\dim \mathrm{Orb}_G(x)$
3) $H^*(\mathcal{B}^x, \mathbb{C})$ как $A(x) := G_x/G_x^0$ - модуль

Вопросы:

1) $\mathcal{B}^x = \bigsqcup_i \mathbb{K}^{a_i}$? — замощено.
2) $\mathrm{Comp}(\mathcal{B}^x)$ как $A(x)$-множество?
3) Какие комп. гладки?
4) Есть ли гладкая компонента?
5) $\mathrm{Stab}(\mathcal{D}^b(T^*\mathcal{B}\text{-}\mathrm{Coh}_{\mathcal{B}^x})) = ?$

— 2 —

огр. об. alg:

$$T^*\mathcal{B}\text{-}\mathrm{Coh}_{\mathcal{B}^\times} \rightsquigarrow J_x \leftarrow \text{асимпт. alg Гекке}$$

$$\mathcal{U}^\circ_x(g) \leftsquigarrow\ \xleftarrow{\text{2-algebr.}}\ T^*\mathcal{B}\text{-}\mathrm{Coh}_{\mathcal{B}^\times}$$

2 A(x)-множества

понед

пятница

$$Y = \bigoplus_x \mathrm{Irr}(\mathcal{U}^\circ_x(g)) \qquad \tilde{Y} \text{ s.t. } J_x = \mathrm{End}_{A_x}(\tilde{Y}\text{-}\mathrm{Coh}_{A(x)})$$

гип. Люстига $\quad Y \underset{A(x)}{\cong} \tilde{Y}$

alg $\quad$ кон. группа $\quad$ Kat.

Моноид. Геом

Двойственность: $\quad A \circlearrowleft G \longrightarrow A\text{-mod} \Longleftarrow G\text{-пучки}$ $\quad$ двойств. X

$$A\#\mathbb{K}G = A*G \longrightarrow A*G\text{-mod} \quad - \quad G\text{-экв. пучки } X/G$$

$$ga = {}^g a \cdot g$$

$$(\mathbb{K}G)^* \circlearrowright \quad (A*G)\#(\mathbb{K}G)^* \longrightarrow A*G\text{-grmod} \quad - \quad G^\circ\text{-экв. пучки} \quad (X/G)/G^\circ$$

$$(A*G)\#(\mathbb{K}G)^* \cong M_{|G|}(A)$$

Картье двойс.

Мораль: $\quad X \cong (X/G)/G^\circ$

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}\otimes\mathcal{O}_B \longrightarrow TB$$

$\mathfrak{g}$ — алг. Ли; алгеброиды Ли

$$U\mathfrak{g} \xrightarrow{\pi} U(TB) = \mathcal{D}_B \leftarrow \text{дифф. operators}$$

$U\mathfrak{g} \twoheadrightarrow U^0 \to U(TB)$

конеч. над $\mathbb{F}_p$ / схема p

p-центры

$$\langle x^p - x^{[p]}\rangle_{x\in\mathfrak{g}} \twoheadrightarrow \langle x^p - x^{[p]}\rangle / A^G \longrightarrow \langle f^p,\ \partial^p - \partial^{[p]}\rangle$$

$$\mathfrak{g}^{(1)} \longleftarrow \mathfrak{g}^{(1)}_{me} \xleftarrow{\pi} T^*B^{(1)} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p$$

$$x \longleftarrow B^x$$

Локализация

$$D^b(U^0\text{-Mod}) \underset{R\Gamma}{\overset{L\mathcal{D}\otimes_{U^0}}{\rightleftarrows}} D^b(\mathcal{D}_B\text{-Mod}) \text{ — эквивалент.}$$

Азумаи на T^*B

$\mathcal{D}_B$ — Аз. ал.-а.

Пример $X = \mathbb{A}^1 \ni z,\ \operatorname{Spec} \mathbb{K}[z]$, $\mathcal{D}_X = \mathbb{K}\langle z,\partial\rangle / (\partial z - z\partial - 1)$ — ал.

$$\mathbb{K}[z^p,\partial^p] \subset \mathcal{D}_X$$

z,∂ ↻

$$\operatorname{End}_{\mathbb{K}[z^p,\partial^p]} \mathbb{K}[z,\partial] \cong \mathbb{K}[z^p,\partial]\otimes_{\mathbb{K}[z^p,\partial^p]} \mathcal{D}_X$$

left mult, Right mult.

Плоское расщепление

Замечание

Note: $\dim X > 0 \Rightarrow \mathcal{D}_X$ не расщ. $\Rightarrow Br_{ot}(T^*X) \neq 0$

Тривиал.: $\mathcal{D}_B \big|_{\text{Form}(B^x)}$ расщепляется $(\cong \operatorname{End} V_\lambda)$ — зависит от веса

$$\lambda \in \underbrace{W_a \bullet 0}_{\text{после}}$$

Всё вместе: $I_x = \{a^p - a^{[p]} - \langle a, x\rangle^p\cdot 1\} \triangleleft U^0$

Th.

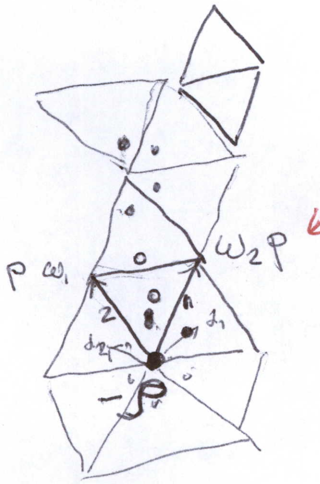
$$D^b(U^0\text{-Mod}_{I_x}) \underset{\Gamma_\lambda}{\overset{L_\lambda}{\rightleftarrows}} D^b(T^*B\text{-Coh}_{B^x})$$

$$W_a = W \ltimes \mathrm{Roots}$$
$\subset \Lambda$

двойств. тип.
нерасшир., i.e Coxeter.
$\rho = \frac{1}{2}\sum$ pos. roots

$\bullet$ - действие $\quad (w, \mu) \bullet (\alpha+\rho) = w(\alpha+\rho) + p\,\mu)$

$\rho = \frac{1}{2}\Sigma$

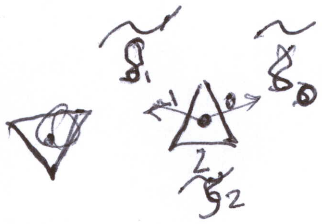


объяснить обе системы порождающих

$\langle s_0, s_1, s_2 \rangle$

$W_a \bullet 0$ — своб. орбита, где $\mathrm{Aut}(W_a \circ \ldots)$ W_a

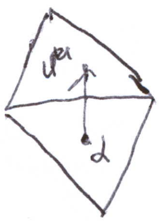
"лок. аф. группа Вейля"



косое.

$$W_a \cong \langle s_i \mid s_i^2,\ \underbrace{s_i s_j \ldots}_{m_{ij}} = \underbrace{s_j s_i \ldots}_{m_{ij}} \rangle \longleftarrow B_a \langle s_i \mid \ldots \rangle$$

Th. Если

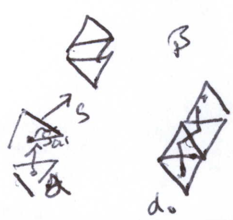


$\mu = \tilde{s}_i(\alpha) > \alpha$

то $T_i = \Gamma\, L_\mu \circ \Gamma_\alpha$ не зависит от i и определяет действие группы кос на $D^b(T^*\mathcal{B}\text{-}\mathrm{coh}_{\mathcal{B}^\times})$

Зам. $\quad B_a = \langle W_a \mid x \bullet y = xy \mid |xy| = |x| + |y| \rangle$

$x \in W_a$
$\| \quad s_{\alpha_1} \ldots s_{\alpha_n}$



x действует как $\Gamma\ L_\beta \circ \Gamma_\alpha$

−5−

W_a is a ~~coxeter group~~. For any Coxeter Group, $\langle W|S\rangle$

$$\mathcal{H}(W) := \mathbb{Z}[v^{\pm 1}]\,\mathcal{B}(W) \,/\, T_s^2 = (v^{-1}-v)T_s + 1$$

T_s

2 basisa стандартн: $w \in W$, $w = s_1 \dots s_m \Rightarrow T_w := T_{s_1} \dots T_{s_m}$

Канонические: инв. $\overline{T_w} \mapsto T_{w^{-1}}^{-1}$, $v \mapsto v^{-1}$

(1) $\overline{H_w} = H_w$

$$H_w = T_w + \sum_{y<w} h_{y,w} T_y \quad \text{с} \quad h_{y,w} \in v\mathbb{Z}[v]$$

$$H_x H_y = \sum_z \mu_{xy}^z H_z$$

Функция a $\quad a: W \to \mathbb{Z} \quad a(z) = \inf\{ n \mid \forall x,y \in W \ \mu_{xy}^z v^n \in \mathbb{Z}[v]\}$

ас. Гекке $\quad J := \lim_{v \to 0} \mathcal{H}(W) \to J = \bigoplus_{x \in W} \mathbb{Z} t_x$

$$t_x t_y = \sum_z \gamma_{xy}^z t_z \quad \text{где} \quad \gamma_{xy}^z = v^{a(z)} \mu_{xy}^z \Big|_{v=0}.$$

условие ст. гор. позитивности

Th (Люстиг) $\quad J$ - асс. алгебра

$$1 = \sum_{x \mid a(x) = |x| - \deg h_{1,x}} t_x$$

отм. инволюцией

Гомоморфизмы:

$$\cancel{\mathbb{Z}[v^{\pm 1}]W \to \operatorname{End} M_w} \leftarrow \mathcal{H}(W) \xrightarrow{\varphi_L} J \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$$

по рег. W-графам

$\cong$

деформация $\mathbb{Z}[v^{\pm1}]W$

Но допускает лучшую категорификацию. (С фьюзин-категорией)

изо над после спец. в $\mathbb{C}$

алгебра A — базис b_x, $x \in X$

$I \triangleleft A$ базовые если $I \cap X$ — базис A

$\forall\, Y \subseteq X$ $\quad \overline{AY} := \bigcap\limits_{Y \subseteq I \triangleleft^L_b A} I$ — левый баз. идеал

~~пред~~ Все порядок: для X: $\quad x \le_L y$ если $b_x \in \overline{A b_y}$

транз. и рефл.

$\le_R, \le_D \rightsquigarrow \sim$ — классы "клетки"

и $\le$ на

Есть W, 2 базиса C_x in $\mathcal{H}$, t_x в J.

Тогда ① $\overline{\mathcal{H} C_x} = \overline{\mathcal{H} C_y} \iff \overline{J t_x} = \overline{J t_y} \iff x \underset{L}{\sim} y \iff$ незав. друг. опред.

② на ~~[illegible]~~ $W/\sim, J$ — дискретно. (коммутизм)

③ $W = W_a = W(\mathfrak{g}) \ltimes \mathrm{Roots}(\mathfrak{g})$ [$= \mathrm{Coroots}(\mathfrak{g}^\vee)$] то $W_a/\sim, \mathcal{H} \xleftrightarrow[\text{порядок}]{\text{1-1 обращает}} \mathfrak{g}^\vee_{nil}/G^\vee$

Пример: $S_n \xrightarrow{RS} \bigsqcup\limits_{\lambda \vdash n} Std_\lambda \times Std_\lambda$

$x \underset{L}{\sim} y \iff RS_1(x) = RS_1(y)$

и $\underset{R}{\sim}$, $\underset{D}{\sim}$ $\iff RS_1^2(x)$ и $RS_2^2(y)$ одной формы

$(12487635) \longmapsto$

1 2 4 8

1 2 4 7
8

1 2 4 6
7
8

1 2 3 6
4
7
6

1 2 3 4

1 2 3 4
5

порядок $\underset{L}{\ge}$ неизвестен

$W = W(g) \rightsquigarrow (W_a(g))$

$\mathcal{H}(W) \overset{\varphi_L}{- - - \triangleright} J(W)$

$\Big\Downarrow$ cat. $\qquad\qquad \Big\Downarrow$ cat.

$A, b_x \rightsquigarrow \mathcal{C}, \otimes$

$A \cong K(\mathcal{C})$

$b_x \leftarrow [L_x]$ $\qquad [L_x \otimes L_y] = [L_x][L_y]$

нерре.

$\mathcal{B} = G/B \quad \left(\mathcal{B}_{aff} = G(\mathbb{K}((z)))/I\mathcal{B}\right)$

$\mathcal{B} = \bigsqcup_{x \in W} \mathcal{B}_a(x) \qquad \mathcal{B}(x) = B\dot{x}B/B$

~ Брюа.

$i(x) : \mathcal{B}(x) \longrightarrow \mathcal{B}$

$\mathcal{C} = D^b_B(\mathcal{B})$ – констр. пучков. $\mathbb{Q}$ – v.s.

$\Delta_x = i(x)_! \underline{\mathbb{Q}}_x [|x|]$

$IC_x = i(x)_{!*} \underline{\mathbb{Q}}_x [|x|]$

$D^b_B(G/B) \cong D^b_{B\times B}(B\backslash G/B)$

$G\times G \xrightarrow{q} G \times_B G \xrightarrow{m} G$

$\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 = m_!(\pi_1^*\mathcal{F} \otimes \pi_2^*\mathcal{F})$

real truth

$P^{ss}_{\leq c} = \langle IC_x \rangle^{\oplus}_{x \in \{\leq c\}}$

$I_c = P^{ss}_{\leq c} / P^{ss}_{<c}$

Then $\underline{I}_c$ is a rigid monoidal ss. abelian category under

$\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2 = {}^p\mathcal{H}^{-a(c)}(\mathcal{F}_1 * \mathcal{F}_2)$

and

$J \cong \bigoplus_{c \in W/\sim_{LR}} K(I_c)$

$t_x \longleftrightarrow [IC_x \otimes \mathrm{mod}\, P^{ss}_{<c}]$

Ostrik +

$I_c \simeq \mathrm{End}(Y_c\text{-}\mathrm{Coh}^{G_x(c)}_{red})$

$K(\mathcal{C}) \cong \mathcal{H}(W)$

$[\Delta_x] = T_x$

$[IC_x] = C_x$

$\boxed{\text{Do } F_4}$

$$\begin{tikzcd} & T^*\mathcal{B}\text{-}\mathrm{Coh}_{\mathcal{B}^x} \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ \mathcal{U}_x^0 \arrow[d, "\wr"] & & J \arrow[d, "\wr"] \\ A = \mathcal{U}_\lambda^0 / \mathrm{Rad}\,\mathcal{U}_\lambda^0 & & B \end{tikzcd}$$

Expect $B \simeq A * G_{x}^{Red}$ if x is dist.

$\underline{C}^0_\bullet \subseteq \underline{C}$ — канон. левая клетка
$C_{W^a} = W \ltimes R$

$\underline{C} \cap R_+$ ($\shortparallel_{\mathrm{der}}$)

Тогда $\underline{I}_{C^0} = P^{ss}_{\leq_L C^0} / P^{ss}_{<_L C}$

и $\underline{I}_C \cong \mathrm{End}_{G_x^{rep}}(\underline{I}_{C^0})$

нужен функтор $\underline{I}_{\underline{C}^0} \longrightarrow \left(\mathcal{U}_x^0\text{-}\mathrm{Mod}^{ss}\right)^{G_x^{Rep}}$

Наименее $\underline{I}C_\lambda \bmod P^{ss}_{<C} \longmapsto \mathrm{Coind}\left(R\Gamma\left(\left((T^*\mathcal{B} \to \mathcal{B})^* \mathcal{O}_\lambda\right) \otimes V_\mu\right)\right)$, $V_\mu \in \mathrm{Sph}$

но остаются устан. свойства.