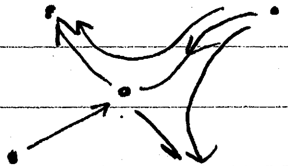
Slava Rychkov
"Four-dimensional CFTs in particle physics"
(Лекция на физфаке МГУ 21/04/2011)

Почему конформные теории поля?

Масса других теорий; потоки (Вильсон '70) — орг. принцип



• ← фикс. точки

$\boxed{\text{• масштабная инвариантность}}$ • универсальность

Примеры: а) Модель Изинга (2D, 3D) — ферромагнетизм

•) критическая точка перехода жидкость – газ (см. Паташинский – Покровский, Cardy)

$$\langle M(x)\,M(0)\rangle \sim \frac{1}{|x|^{2\Delta}}\, e^{-\frac{|x|}{\xi(T)}} \longrightarrow \frac{1}{|x|^{2\Delta}} \qquad (T\to T$$

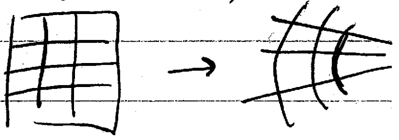
корр. длина $\xi(T)$ –

⇒ масштабная инвариантно

$$x \to \lambda x$$

Конформная инвариантность (бесплатная добавка)

$$\delta_\varepsilon x^\mu = 2(\varepsilon\cdot x)\,x^\mu - (x^2)\,\varepsilon^\mu$$



Откуда? Не совсем ясно. Унитарность...
кажется, справедливо в случае общего положения см. 0910.1087

Предположим ⇒ много полезного

•) 2х точечники диагональны $\langle \varphi_i(x)\,\varphi_j(0)\rangle \sim \dfrac{\delta_{ij}}{|x|^{2\Delta_i}}$ ↑ размерно

•) 3х точечники предсказаны

$$\langle \varphi_i(x)\,\varphi_j(y)\,\varphi_k(0)\rangle \sim \frac{C_{ijk}}{|x-y|^{\Delta_i+\Delta_j-\Delta_k}\cdot|x|^{\Delta_i+\Delta}\,|y|^{\Delta_j+\Delta}}$$

спектр

$\{\Delta_i,\ C_{ijk}\}$ — конформные данные
(фактически определяют теорию)

Операторное разложение: $\varphi(x)\,\varphi(0) = |x|^{-2\Delta_\varphi}\Big(1+\sum_O \dfrac{C_{\varphi\varphi}}{|x|^{\Delta_O}}\,O(+ \dots$

Понимается внутри корреляторов

$$\langle \varphi(x)\,\varphi(0)\dots\rangle = \sum \langle O(0)\dots\rangle$$ члены с производными $\partial_\mu O$

Я немного упрощаю.

1) примарные операторы и потомки (производные)

2) присутствуют операторы высших спинов l

(симметричные бесследные тензоры размерности $\Delta \geq l$.
ранга l

Например тензор ЭИ $T_{\mu\nu}$, $T^{\mu}_{\mu} = 0$ — усл.
конф. ин

см. 0807.0004

$\boxed{\text{Как определить } \{\Delta_i, C_{ijk}\} ?}$

В 2D — беск. конф. группа (алгебра Вирасоро)

$D \geq 3$

Долгое время считалось, что невозможно без доп. предположений (SUSY; интегрируемость для $\mathcal{N} = 4$ SYM)

Поляков '1974 — 'конформный бутстрап' — условие самосогласованности на конф. данные

→ Конф. симметрия не фиксирует 4х-точечник:

$$\langle \varphi(x_1)\, \varphi(x_2)\, \varphi(x_3)\, \varphi(x_4) \rangle = \frac{1}{(\underset{x_1 - x_2}{\underset{\shortparallel}{X_{12}}})^{2\Delta_\varphi}} \frac{1}{(x_{34})^{2\Delta_\varphi}}\, g(u, v)$$

$u = \frac{X_{12}^2\, X_{34}^2}{X_{13}^2\, X_{24}^2}$, $v = u_{2 \leftrightarrow 4}$ перекрестные соотношени

Масш. инв.: $x \to \lambda x$ RHS $\sim \lambda^{-4\Delta_\varphi}$

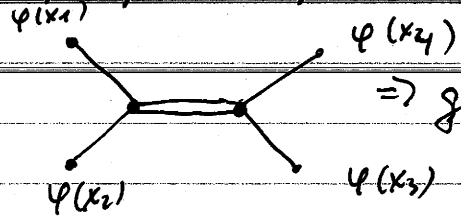
Конф. инв: $x \to f(x)$ RHS $\sim \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)^{\Delta_\varphi}}$

λ_i — 'локальный коэфф. растяжения' (Якобиан)
в точке x_i

$u, v = \text{inv}$.

Однако, функцию $g(u,v)$ можно вычислить через операторное разложение

конформные блоки



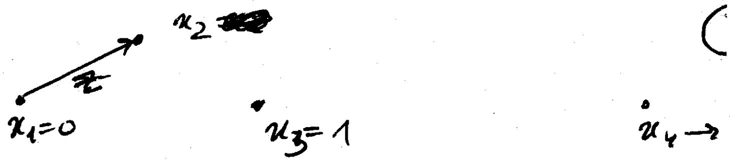
$$\Rightarrow g(u,v) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{вклад единичного оператора}}}{1} + \sum{}' C^2_{\Delta, l}\, g_{\Delta, l}(u, v)$$

$$\varphi(x)\, \varphi(0) \supset \frac{C_{\Delta l}\, |x|^{\Delta_O}}{|x|^{2\Delta_\varphi}} \frac{x^{\mu_1} \dots x^{\mu_l}}{|x|^{l}}\, O_{\mu_1 \dots \mu_l}$$

Функции $g_{\Delta, l}$ удается вычислить в явном виде в 2х и 4х измерениях. (Нетривиально из-за присутст. производных) Dolan, Osborn hep-th/0309180

$u = z\bar{z}$

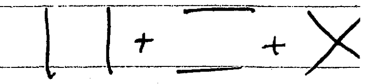
$v = (1-z)(1-\bar{z})$



4D: $$g_{\Delta,l} = \frac{z\bar{z}}{z-\bar{z}}\left(k_{\Delta+l}(z)\, k_{\Delta-l-2}(\bar{z}) - z \to \bar{z}\right)$$

$$k_\beta(z) = z^\beta\, F(\beta/2, \beta/2, \beta; z)$$

$\bar{z} = z^*$ в Евклиде

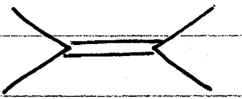
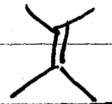
Пример: свободный скаляр: $\langle \varphi\varphi\varphi\varphi \rangle =$ 

$O_{\Delta,l} \sim \varphi\, \partial_{\mu_1} \ldots \partial_{\mu_l} \varphi$ − traces

коэффициенты $C_{\Delta,l}$ можно найти,

ряд сходится

в общем случае → Он сходится в круге $|z| < 1$

Конф. бутстрап: $\sum\limits_O$  $= \sum\limits_O$  кроссинг-симметрия

$\boxed{v^{\Delta_\varphi} g(u,v) = \text{[illegible]}\ u \Leftrightarrow v}$

$\boxed{\text{подтягивание за шну}}$

$d = \Delta_\varphi$

$$u^{d_\varphi} - v^{d_\varphi} = \sum_O C^2_{\Delta,l}\left[v^d g_{\Delta,l}(u,v) - u^d g_{\Delta,l}(v,u)\right]$$

$$\boxed{1 = \sum_O C^2_{\Delta,l}\ F_{d,\Delta,l}(u,v)}$$ — правило сумм

$$F = \frac{v^d g_{\Delta,l}(u,v) - u^d g_{\Delta,l}(v,u)}{u^d - v^d}$$

Это условие было по сути изв. с 74 г., хотя конф. блоки не были изв. в явном виде. Считалось, что на практике безнадежно (без доп. пред

В 2008 г. дело сдвинулось с мертвой точки.

Мы изучали такой вопрос — что происходит с конф. теорией, ес размерность оператора φ близка к ед., $\Delta_\varphi = 1+\varepsilon$, скажем $\varepsilon = c$ феноменологическая мотивация; см. 0807.0004. В каком смысле φ близко к свободному полю? Пришлось вернуться к бутстрапу. Подумаем. Функциональное ур-е. F's векто

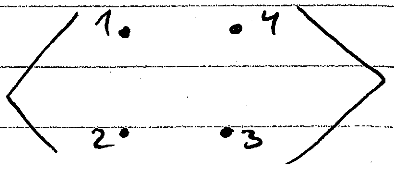
$p_{\Delta,l} = C^2_{\Delta l} > 0$. Конус, выпуклый. На яз. функц. аналих

зафиксируем спектр $\{\Delta\, l\}$

Конус в пространстве частных производных.

$$F \to \left\{ F^{(n,m)}\Big|_{\substack{z=z_0\\ \bar z=\bar z_0}} \right\}_{n,m\le N}$$

В какой точке? $z_0=\bar z_0 = 1/2$ – демократический выбо



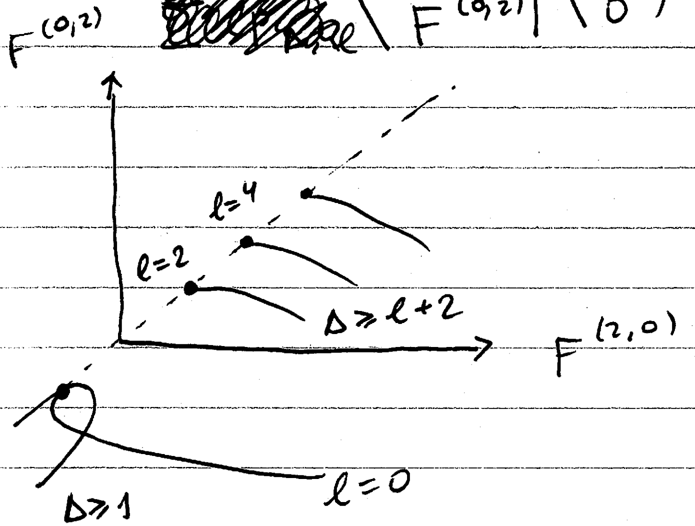
Только чётные производные $\neq 0$

$$\left(F^{(0,0)}, F^{(2,0)}, F^{(0,2)}\right)$$

$$\sum p_{\Delta,l} \begin{pmatrix} F^{(0,0)}_{d,\Delta,l} \\ F^{(2,0)} \\ F^{(0,2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← normalization.

ищем нетривиальное решение

$d=1.$



$\Rightarrow$ а) при $d=1$ $l=0$, $\Delta=2$ скаляр должен присутствоват в оп. разложении $\varphi\times\varphi$

б) при $d=1+\varepsilon$ теория без скаляров в $\varphi\times\varphi$ невозможна

в) размерность первого скал в $\varphi\times\varphi$ ограничена свер

Вывод

- Решать бутстрапное уравнение пока ещё сложно, но можно делать нетривиальные заключения о структуре любого его решения (любой конф. теории) (неравенства между оп. размерностями, ограничение на коэфф.)
- Это молодая область исследований, и практически любой результат является новым.
- Есть открытые задачи разных типов –
  - как обобщить метод на 3х мерный случай) теория
  - на поля высших спинов
  - численное исследование бутстрапного ур-я с целью подметить скрытые закономерности) экспери
- Хоть я об этом и не говорил, Конф. Т.П. часто появляются в гипотетических объяснениях разн. загадок физики частиц. Они также играют важн роль в физике конд. сост. Теор. прогресс в Конф.Т.П. будет востребован.